第 50 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 1
2011 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2011

分数微分方程 m 点边值问题解的存在性与唯一性*

王金华[1,2]，赵育林[1]，向红军[2]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 湘南学院数学系，湖南 郴州 423000）

摘　要：应用不动点理论考察了一类分数微分方程多点边值问题解的存在性与唯一性，获得了其解存在及唯一的充分条件，并举例说明了所得结果的有效性。

关键词：分数微分方程；边值问题；不动点原理
中图分类号：O175.14　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529－6579（2011）01－0004－05

Existence and Uniqueness for m－point Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation

WANG Jinhua[1,2]，*ZHAO Yulin*[1]，*XIANG Hongjun*[2]
（1. School of Mathematics and Computational Science，Sun Yat-sen University，Guangzhou 510275，China；
2. Department of Mathematics，Xiangnan University，Chenzhou 423000，China）

Abstract：Using fixed-point theorems，sufficient conditions for the existence and uniqueness for m-point boundary value problem of fractional differential equations are established. Moreover，examples are given to show the effectiveness of our works.

Key words：fractional differential equation；boundary value problem；fixed-point theorem

近年来，由于分数微积分理论的广泛发展及这些理论在许多领域的广泛应用（见文献［1－4］及其所引文献），分数微分方程越来越受到学者们的关注，出现了许多关于分数微分方程解的存在性和唯一性的结果，而这些结果大部分集中在分数微分方程的初值问题的解。最近也较多地出现了一些关于分数微分方程的边值问题的文献［4－12］，但由于研究的难度较大，较多的是两点边值问题，而且主要是零边值条件；分数微分方程的多点非零边值问题文献很少见。其中，文［5］考虑了如下 m 点边值问题

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t)+q(t)f(t,x(t))=0, \\ \quad t\in[0,1],\alpha\in(n-1,n],n\geqslant 2 \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0, \\ x(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\xi_i x(\eta_i) \end{cases}$$

这里 $0<\eta_1<\cdots<\eta_{m-2}<1$，$\xi_i>0$（$i=1,2,\cdots,m-2$），$\sum\limits_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-1}<1$。方程中的导算子 D^{α} 是 α 阶 Pseudo 分数导数，该文获得了此系统至少存在一个 Pseudo 解的充分条件。

文［6］研究了以下非局部多点边值问题

* 收稿日期：2010－03－02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871214）；湖南省自然科学基金资助项目（10JJ6007）；湖南省科技计划资助项目（2009JT3042，2010GK3008）
作者简介：王金华（1968 年生），女，副教授，硕士；通讯作者：向红军；E-mail：hunxhjxhj67@126.com

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1, 1<\alpha<2 \\ u(0)=u_0+g(u), u'(1)=u_1+\sum_{i=1}^{m-2}b_iu'(\xi_i) \end{cases}$$

其中，$u_0,u_1\in\mathbb{R}$，$b_i\geqslant0$，$0<\xi_i<1$（$i=1,2,\cdots,m-2$），$\sum_{i=1}^{m-2}b_i<1$。方程中的导算子${}^cD_{0+}^{\alpha}$是α阶 Caputo 分数导数，该文获得了系统解的存在性及唯一性的判据。

本文考虑如下 m 点边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)), 0<t<1, 1<\alpha\leqslant2 \\ u'(0)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_iu'(\xi_i), u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_iu(\xi_i) \end{cases} \tag{1}$$

其中方程中的导算子 ${}^cD_{0+}^{\alpha}$ 是α阶 Caputo 分数导数，且$0<\xi_i<1$，$\alpha_i\geqslant0$，$\beta_i\geqslant0$（$i=1,2,\cdots,m-2$），$\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$，$\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i<1$。将分别用 Banach 和 Schauder 不动点理论，获得了该系统解存在与唯一的充分条件，并举例说明所得到的理论的有效性。

1　准备工作

在这一节里，先给出本文所涉及的一些分数阶导数，分数积分的定义和一些基本命题。

定义 1[1-2]　函数 $y:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha>0$ 次的 Riemann-Liouville 分数积分为

$$I^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds$$

上式右端在内 $(0,\infty)$ 内逐点有定义。

定义 2[1-2]　函数 $y:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的 α 阶 Caputo 分数导数为

$${}^cD_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(s)\,ds$$

其中 Γ 是 gamma 函数，$n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 表示 α 的整数部分，上式右端在 $(0,\infty)$ 内逐点有定义。

注 1　当 $\alpha\to n$ 时，上式中的 Caputo 导数即为函数 $y(t)$ 的经典的 n 阶导数。

定义 3[5]　函数 $x(t)$ 的 α（$\alpha\in(n-1,n]$，$n\in\mathbb{N}$）阶 Pseudo 分数导数为

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}x(t):=D^nI^{n-\alpha}x(t)$$

其中 I^{α} 表示 α 阶 Pseudo 分数积分满足 $I^{\alpha}x(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)\,ds$。

引理 1[7]（Schauder 不动点定理）　设 U 是 Banach 空间 X 的有界闭凸子集，如果 $T:U\to U$ 是全连续算子，则 T 在 U 中有不动点。

由 Caputo 分数导数的定义及注 1，可以得到如下结论。

引理 2[8-9]　设 $\alpha>0$，则分数微分方程 ${}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)=0$ 有解

$$u(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$$

其中，$c_i\in\mathbb{R}, i=0,1,\cdots,n-1, n=[\alpha]+1$。

由以上引理 2，有如下引理。

引理 3[8-9]　设 $\alpha>0$，则 $I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$，其中，$c_i\in\mathbb{R}$，$i=0,1,\cdots,n-1$，$n=[\alpha]+1$。

引理 4　设 $y\in C[0,1]$，则边值问题：

$${}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)=y(t), 0<t<1, 1<\alpha\leqslant2 \tag{2}$$

$$u'(0)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_iu'(\xi_i), u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_iu(\xi_i) \tag{3}$$

有唯一解

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds+\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}y(s)\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds$$

其中 $A=\frac{1}{1-d_1}$，$B=\frac{1}{1-d_2}$，$C=\frac{1-d_3}{1-d_2}$，$d_1=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i$，$d_2=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i$，$d_3=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i$。

证明　将（2）式两边求 α 次积分，由引理 3 得

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds+c_0+c_1t \tag{4}$$

将上式两边求导得

$$u'(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}y(s)\,ds+c_1 \tag{5}$$

由（3）式的边值条件 $u'(0)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_iu'(\xi_i)$ 代入（5）式有

$$c_1=\frac{(\alpha-1)}{(1-d_1)\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-2}y(s)\,ds$$

将（3）式的边值条件 $u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_iu(\xi_i)$ 代入（4）式得

$$c_0=\frac{1}{(1-d_2)\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds-\frac{1}{(1-d_2)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds-$$

$$\frac{1-d_3}{1-d_2}\frac{(\alpha-1)}{(1-d_1)\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-2}y(s)\,ds$$

将 c_0,c_1 代入（4）式得

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds+\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}y(s)\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\,ds$$

2 主要结果

利用 Banach 及 Schauder 不动点定理分别讨论系统（1）解的存在性及唯一性。

设 $X=\{u(t)\mid u(t)\in C[0,1]\}$，定义范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|u(t)|$，显然 X 是 Banach 空间。

另定义算子 $T:X\to X$ 如下

$$Tu(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\,ds+\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}f(s,u(s))\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\,ds-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\,ds \tag{6}$$

定理 1 假设以下条件成立

(i) 函数 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续；

(ii) 存在正的常数 $L^*>0$ 使得函数 $f(t,u(t))$ 满足

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leq L^*|u-v|,\quad t\in[0,1],u,v\in\mathbb{R}$$

(iii) $\dfrac{1+\alpha Ad_1(1-C)+B(1+d_2)}{\Gamma(\alpha+1)}L^*<1$，

则分数边值问题（1）在区间 $[0,1]$ 上有唯一解。

证明 由引理 4 及（6）式可知，只需证明（6）式所定义的算子 T 有唯一不动点即可。设 $\forall u(t),v(t)\in X$，则对 $\forall t\in[0,1]$，有

$$|Tu(t)-Tv(t)|\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\cdot|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds+\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}\cdot|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\cdot|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds\leq$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{A(\alpha-1)(t-C)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-2}ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}ds\right\}L^*\|u-v\|\leq$$

$$\left\{\frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{A(t-C)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-1}+\frac{B}{\alpha\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i^{\alpha}+\frac{B}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right\}L^*\|u-v\|\leq\frac{1+\alpha Ad_1(1-C)+B(1+d_2)}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot L^*\|u-v\|<\|u-v\|$$

于是有 $\|Tu(t)-Tv(t)\|<\|u-v\|,t\in[0,1]$。

因此，$T:X\to X$ 是压缩映射，由 Banach 不动点原理 T 在 X 中有唯一不动点。即边值问题（1）有唯一解，证毕。

定理 2 设函数 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且存在一个在 $[0,1]$ 的任何子区间上都不恒等于零的非负连续函数 $p(t)$ 及非减函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 使得

$$|f(t,u)|\leq p(t)\varphi(|u|),\quad (t,u)\in[0,1]\times\mathbb{R}$$

同时存在正的常数 r，使得 $p_0\varphi(r)\leq r$。则边值问题（1）至少有一个解，这里

$$p_0=\frac{1+B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds+\frac{A(\alpha-1)(1-C)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-2}p(s)\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds$$

证明 令 $U=\{u(t)\in X\mid\|u\|\leq r,t\in[0,1]\}$。将用 Schauder 不动点定理证明 T 在 U 中至少有一个解。下面分三个步骤：

1) $T:U\to U$。

任取 $u\in U$，则有 $\|u\|\leq r$。于是，对 $\forall t\in[0,1]$，有

$$|Tu(t)|\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|\,ds+\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}\cdot|f(s,u(s))|\,ds+\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|\,ds+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|\,ds\leqslant$$

$$\Big\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds+\frac{A(\alpha-1)(1-C)}{\Gamma(\alpha)}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-2}p(s)\,ds+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds\Big\}\varphi(|u|)\leqslant$$

$$p_0\varphi(r)\leqslant r$$

所以有 $\|Tu(t)\|\leqslant r$，即 $T:U\to U$。

2) T 连续的。

设 $\{u_n(t)\}$ 是 X 中的函数列且 $u_n(t)\to u(t)\in X$，$t\in[0,1]$。由于

$$|Tu_n(t)-Tu(t)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\cdot$$

$$\sup_{s\in[0,1]}|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds+$$

$$\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}\cdot$$

$$\sup_{s\in[0,1]}|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)^{\alpha-1}\cdot$$

$$\sup_{s\in[0,1]}|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\cdot$$

$$\sup_{s\in[0,1]}|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds$$

而 $f(t,u(t))$ 连续，因此当 $n\to+\infty$ 时，有 $|Tu_n(t)-Tu(t)|\to0$。所以 $T:U\to U$ 连续。

3) T 是等度连续的。

任取 $u\in U$，$\forall\varepsilon>0$，$t_1,t_2\in[0,1]$，且不妨设 $t_1<t_2$。令 $M=\max\limits_{t\in[0,1],u\in U}|f(t,u(t))|$。于是有

$$|Tu(t_2)-Tu(t_1)|=$$

$$\Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\,ds+$$

$$\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t_2-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}f(s,u(s))\,ds-$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))\,ds-$$

$$\frac{A(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t_1-C)(\xi_i-s)^{\alpha-2}f(s,u(s))\,ds\Big|\leqslant$$

$$\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\Big\{\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1})\,ds+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\Big\}+$$

$$\frac{A(\alpha-1)M}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(t_2-t_1)(\xi_i-s)^{\alpha-2}ds=$$

$$\frac{M(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha})}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{MA\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)$$

从上式可以看出，当 $t_2\to t_1$ 时上面不等式右边趋于 0。因此 TU 等度连续，显然也是一致连续的，所以 TU 是相对紧的，即 T 是全连续的。由引理 1（Schauder 不动点定理）可知 T 在 U 中至少存在一个不动点，也就是边值问题（1）至少存在一个解。定理证毕。

3　应用举例

例 1　考虑以下分数微分方程

$$\begin{cases}{}^cD_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t)=\dfrac{u(t)}{7(1+t^2)(1+u(t))},0<t<1\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_iu'(\xi_i),\quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_iu(\xi_i)\end{cases}\tag{7}$$

取 $d_1=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i=\frac{1}{2}$，$d_2=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i=\frac{3}{4}$，$d_3=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i=\frac{1}{4}$，则有 $A=2$，$B=4$，$C=3$。显然 $\forall u(t)$，$v(t)\in X$ 都有 $|f(t,u)-f(t,v)|\leqslant\frac{1}{7}|u-v|$ 成立。经过计算得到 $\frac{1+\alpha Ad_1(1-C)+B(1+d_2)}{\Gamma(\alpha+1)}L^*=\frac{20}{21\sqrt{\pi}}<1$。由定理 1 得系统（7）存在唯一解。

例 2　考虑以下分数微分方程

$$\begin{cases}{}^cD_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t)=\dfrac{tu^2\sin u^2}{3+e^t},\quad 0<t<1\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_iu'(\xi_i),\quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_iu(\xi_i)\end{cases}\tag{8}$$

取 $d_1=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i=\frac{1}{2}$，$d_2=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i=\frac{3}{4}$，$d_3=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i=\frac{1}{4}$，则有 $A=2$，$B=4$，$C=3$，

$$p_0=\frac{1+B}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}+$$

$$\frac{A(\frac{3}{2}-1)(1-C)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i^{\frac{3}{2}}+$$

$$\frac{B}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i^{\frac{5}{2}}<$$

$$\frac{1+B}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}+\frac{\frac{1}{2}A(1-C)d_1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}+$$

$$\frac{Bd_2}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}=\frac{8}{5\sqrt{\pi}}$$

显然 $|f(t,u)|\leqslant\frac{tu^2}{4}$。取 $p(t)=t$，$\varphi(|u|)=\frac{1}{4}|u|^2$，则当$0<r<\frac{20\sqrt{\pi}}{8}$时，都有$p_0\varphi(r)\leqslant r$成立。由定理2得系统（8）在 $U=\{u(t)\in X\mid \|u\|\leqslant r<\frac{20\sqrt{\pi}}{8},t\in[0,1]\}$ 中至少有一个解。

参考文献：

[1] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[2] SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications [M]. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publisher, 1993: 36 – 37.

[3] KILBAS A A, MARZAN S. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions [J]. Differ Eqn, 2005, 1141: 84 – 89.

[4] WANG J H, XIANG H J, LIU Z G. Positive solution to non-zero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations [J]. International Journal of Differential Equations, 2010: 1 – 12.

[5] SALEM HUSSEIN A H. On the fractional order m – point boundary value problem in reflexive Banach spaces and weak topologies [J]. J Comput Appl Math, 2009, 224 (2): 565 – 572.

[6] ZHONG W Y, LIN W. Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations [J]. Comput Math Appl, 2010, 59(3):1345 – 1351.

[7] CHENG Y, ZHU G G. Existence of fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2005, 310: 26 – 29.

[8] ZHANG S Q. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Electron J Diff Eqn, 2006, 36: 1 – 12.

[9] BENCHOHRA M, HAMANI S, NTOUYAS S K. Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(7/8): 2391 – 2396.

[10] WANG J H, XIANG H J, LIU Z G. Positive solution for three-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equation with p-Laplacian [J]. Far East Journal of Applied Mathematics, 2009,37 (1): 33 – 47.

[11] LIANG S,ZHANG J. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009,71(11):5545 – 5550.

[12] BAI Z, LU H. Positive solutions for boundary value problem of nonliner fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005,311(2):495 – 505.

（上接第3页）

[6] KANEKO H, NOREN R D, XU Y. Regularity of the solution of Hammerstein equations with weakly singular kernel [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1990, 13:660 – 670.

[7] KANEKO H, NOREN R D, PADILLA P A. Singularity preserving Galerkin method for Hammerstein equations with logarithmic kernel [J]. Adv Comput Math, 1998, 9: 363 – 376.

[8] LI F, LI Y, LI Z. Existence of solutions to nonlinear Hammerstein integral equations and applications [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 209 – 227.

[9] CAO Y, XU Y. Singularity preserving Galerkin methods for weakly singular Fredholm integral equations [J]. J Integral Equations Appl, 1994, 6: 303 – 333.

[10] ZHANG Y, CHEN Z. Singularity preserving Petrov-Galerkin methods for weakly singular integral equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2001, 40: 9 – 12.

[11] HUGHES T J R, AKIN J E. Techniques for developing special finite element shape functions with particular reference to singularities [J]. Int J Numer Meth engng, 1980, 15: 733 – 751.